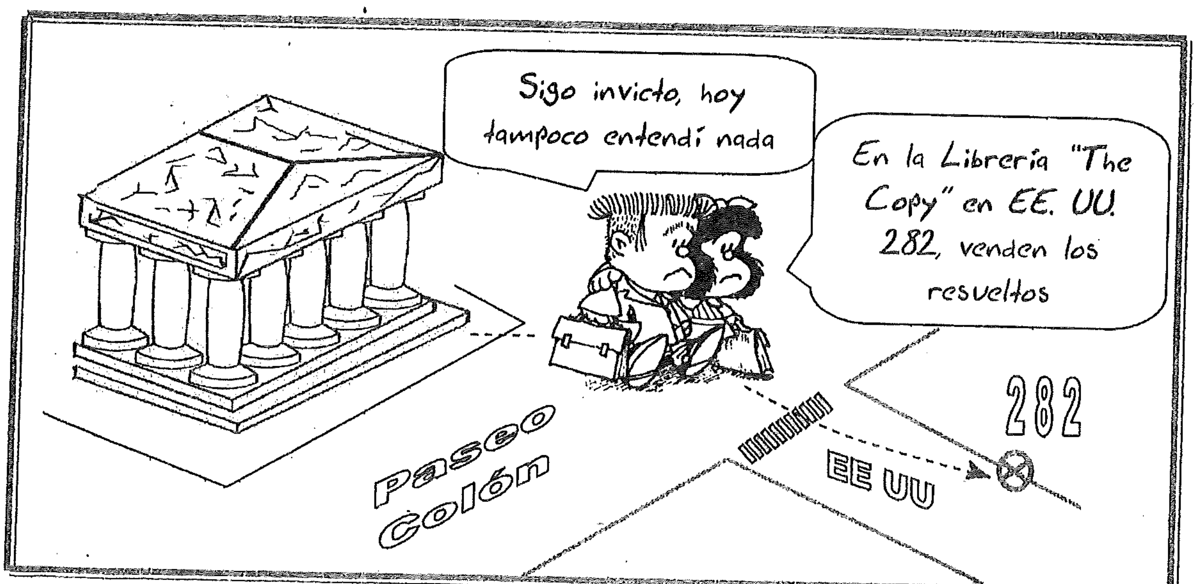
Ejercicios Resueltos

2

Física I

Guía 2

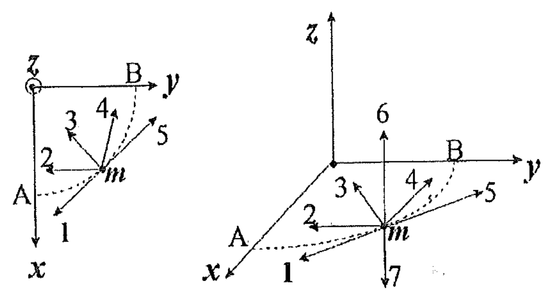
- El trabajo de las fuerzas y la energía -
Trabajo de fuerzas variables - Fuerzas no conservativas -
- El trabajo de las fuerzas y la variación de la energía -
- Teoremas de conservación -



Guía 2: el Trabajo de las fuerzas y la energía

Índice

1. Una partícula se mueve sobre la trayectoria curva desde A hasta B en el plano xy. El módulo de la velocidad está continuamente disminuyendo entre A y B.
a) El trabajo de la fuerza resultante sobre la partícula entre A y B, ¿es positivo, negativo o nulo? ¿Cuál de los vectores numerados del 1 al 7 representa a:
b) la cantidad de movimiento de la partícula?
c) la fuerza resultante sobre la partícula?
d) el momento angular de la partícula respecto al origen de coordenadas?
e) ¿cómo se relacionan entre si?



Teorema de las Fuerzas Vivas

Nos dice que el trabajo de la fuerza resultante (o la suma de los trabajos de todas las fuerzas) es igual a la variación de la energía cinética. $\boxed{W^{result.} = E_{c,f} - E_{c,i}}$

a) Como el módulo de la velocidad está disminuyendo, la energía cinética es cada vez menor, en consecuencia: $W^{result.} = E_{c,f} - E_{c,i} < 0$ es negativo.

b) la cantidad de movimiento es $\vec{p} = m.\vec{v}$. Su dirección y sentido coinciden con el del vector velocidad que es tangente a la trayectoria. Elijo el ⑤ que es tangente a la curva y se dirige de A a B.

c) Para decidir esto es importante repasar lo que vimos en coordenadas intrínsecas. La aceleración tiene dos componentes: una opuesta al vector velocidad (ya que este vector disminuye, existe una componente de aceleración opuesta a v), y otra que apunta hacia el centro de la concavidad (la responsable de que el vector velocidad cambie de dirección). La fuerza resultante está alineada con la aceleración (2^{da} ley de Newton), por lo tanto debe tener una componente como la ③ más otra como la ①, y las junto en un vector como el ②.

d) el momento angular es el producto vectorial del vector $\vec{r}$ con el vector $\vec{p}$. El primero, si se mide desde el origen de coordenadas, tiene el sentido opuesto al vector ③; el segundo dijimos que tiene el sentido del vector ⑤. La dirección del producto vectorial entre ellos dos se saca como vimos en el cuadernillo anterior, con la regla de la mano derecha, y tiene el sentido del vector ⑥.

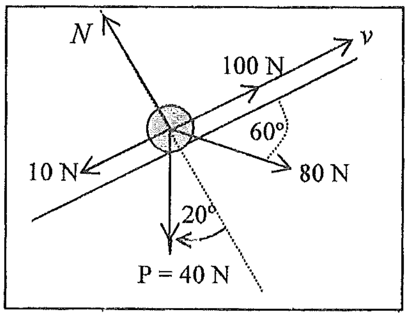
e) en el caso de $\vec{p}$ y $\vec{L}$ la relación es directa: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Pero la relación de estos vectores con la fuerza resultante, viene dada a través de una derivada:

$$\vec{F}_{res.} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \vec{r} \times \vec{F}_{res.} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Presumo que el punto a observar es ver que estas relaciones no nos permiten deducir de inmediato el sentido de la resultante conociendo el de $\vec{p}$ o el de $\vec{L}$ (o viceversa), ya que la resultante se relaciona con el cambio de estos vectores y no directamente con su valor.

2. Un cuerpo con una masa de 4 kg se mueve hacia arriba en un plano inclinado 20° con respecto a la horizontal. Bajo las fuerzas que se muestran en la figura, el cuerpo se desliza 20 m sobre el plano. Calcule el trabajo total hecho por el sistema de fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Como todas las fuerzas son constantes, podemos aplicar la definición de trabajo que les corresponde (sin integrales). En ese caso, debemos determinar el ángulo que forma cada una con el desplazamiento (el cuerpo sube por el plano, paralelo a su superficie). En el enunciado no se aclara bien, pero da la sensación que además de las fuerzas dibujadas, también actúa el Peso (es decir **no** dibujaron todas las que actúan).



De ser así, agregué dos fuerzas: la Normal y el Peso. La primera es superflua para el tema trabajo, porque forma 90° con el desplazamiento. Para el peso en cambio, tenemos (como se ve en el dibujo) un ángulo total que es la suma del ángulo del plano que forma con el eje perpendicular al plano más 90°. Hay que recordar que siempre, para toda fuerza, el ángulo que le corresponde es el que queda determinado con el sentido del movimiento (vector "v")

Por lo demás, en el diagrama se trasladaron los vectores fuerza de modo que su origen sea el cuerpo (que es el punto donde se aplican). Tenemos los siguientes valores para cada trabajo:

$$W_1 = 100\,\mathrm{N}.20\,m.\cos(0) = 2000\,J \qquad W_2 = 10\,\mathrm{N}.20\,m.\cos(180) = -200\,J$$

$$W_3 = 80\,\mathrm{N}.20\,m.\cos(60) = 800\,J \qquad W_{Peso} = 40\,\mathrm{N}.20\,m.\cos(110) = -273{,}6\,J$$

El trabajo total es la suma, es decir $W_{total} = 2326{,}4\ J$

3. a) ¿Qué fuerza constante debe ejercer el motor de un automóvil cuya masa es de 1500 kg para que aumente la velocidad del auto de 4 km/h a 40 km/h en 8 s? (b) Determine la variación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética. (c) Determine el trabajo hecho por la fuerza. (d) Calcule la potencia media del motor. (e) ¿Cuánto se desplazó?

Paso las velocidades al sistema MKS, dividiendo por 3,6:

$$4\ \tfrac{km}{h} \xrightarrow{\div 3{,}6} v_o = 1{,}\widehat{1}\ \tfrac{m}{s} \quad \text{y} \quad 40\ \tfrac{km}{h} \xrightarrow{\div 3{,}6} v_f = 11{,}\widehat{1}\ \tfrac{m}{s}$$

Como nos piden que la fuerza aplicada sea constante, la aceleración que experimenta el auto también lo será. En consecuencia, podemos aplicar las fórmulas del MRUV:

$$v_f = v_o + a.(\Delta t) \xrightarrow{despejo} a = \frac{11{,}\widehat{1}\ \frac{m}{s} - 1{,}\widehat{1}\ \frac{m}{s}}{8\ s} = 1{,}25\ \tfrac{m}{s^2}$$

Por la 2da ley de Newton: $\sum F = m.a \;\rightarrow\; F_M = 1500\ kg.1{,}25\ \tfrac{m}{s^2} = 1875\ \mathrm{N}$

Aclaración: esto de reemplazar a la sumatoria de fuerzas por la fuerza que "aplica el motor" se puede hacer en el caso de rozamientos despreciables. Como no aclara nada, y de otro modo no podría hacerse el problema, lo planteamos en esa suposición.

b) $\Delta\vec{p} = M.\vec{v}_f - M.\vec{v}_i = 1500\ kg.(11{,}\widehat{1}\ \tfrac{m}{s})\ \hat{i} - 1500\ kg.(1{,}\widehat{1}\ \tfrac{m}{s})\ \hat{i} = 15000\ \mathrm{N}.s\ \hat{i}$ ✓

$$\Delta E_c = \tfrac{1}{2} M.v_f^2 - M.v_i^2 = 91\ 666{,}\widehat{6}\ J \ \checkmark$$

c) El trabajo lo podemos calcular como la variación de la energía cinética, según nos dice el Teorema de las Fuerzas Vivas. Es la manera más sencilla, ya que podemos estar seguros que como las otras fuerzas aplicadas al auto (caso Normal y Peso) son perpendiculares al movimiento, la del motor es la única que realiza trabajo:

$$W^{Total} = \Delta E_c \;\rightarrow\; W^{motor} = 91\ 666{,}\widehat{6}\ J \ \checkmark$$

Igualmente, en la parte (e) proponemos otra forma de hacer la cuenta

d) La potencia media la calculamos como el cociente entre el trabajo entregado y el tiempo demorado, fórmula que conocemos del CBC:

$$Pot = \frac{W}{\Delta t} = \frac{91\ 666{,}\hat{6}\ J}{8\ s} \cong 11\ 458{,}\hat{3}\ w \quad \checkmark$$

e) Para averiguar el desplazamiento, podemos recurrir a la fórmula del MRUV:

$$x_f = v_0.\Delta t + \tfrac{1}{2}.a.(\Delta t)^2 = 1{,}\hat{1}\tfrac{m}{s}.8s + \tfrac{1}{2}.1{,}25\tfrac{m}{s^2}.(8\,s)^2 = 48{,}\hat{8}\tfrac{m}{s} \quad \checkmark$$

Observación: este resultado se puede usar para calcular el trabajo pedido en la parte (c) con la expresión: $W = |F|.\Delta x.\cos(\alpha)$, tomando $\alpha = 0$ ya que se supone que la fuerza del motor es hacia delante, a favor del movimiento del auto. Controlá que da el mismo resultado.

4. ¿Qué sucede con la energía cinética del cuerpo que se mueve por la espiral del problema 8 de "Leyes del Movimiento"? ¿Cuánto vale el trabajo de la fuerza neta que actúa sobre la partícula? ¿Por qué?

El dato relevante era que el módulo de la velocidad se mantenía constante, por lo tanto podemos decir que la energía cinética no cambia. Y por el "Teorema de la fuerzas vivas": $\Delta E_c = W^{Total}$

Se concluye que si no cambia la energía cinética ($\Delta E_c = 0$), tampoco habrá trabajo neto. Como vimos en aquel problema, cuando el cuerpo se mueve en la trayectoria en espiral necesariamente debe haber una fuerza neta, ya que está acelerado (la velocidad no cambia de módulo pero si de dirección). La explicación de que está fuerza neta no realice trabajo la vimos en el ejercicio 8: sólo existe en la dirección radial, perpendicular al movimiento, y por lo tanto en todo punto es perpendicular a la trayectoria.

5. Un cuerpo de masa *m* se mueve con velocidad V en relación con un observador O y con velocidad V' con respecto a O'. La velocidad de O' con respecto a O es v. Encuentre la relación entre las energías cinéticas E_c y E_c' del cuerpo medidas por los observadores ubicados en O y O'.

Bueno, para que no sea tan fácil confundir a las velocidades, vamos a ponerle los subíndices que corresponde a movimiento relativo: V = $V_{m,O}$, V' = $V_{m,O'}$, v = $V_{O',O}$

La energía cinética del cuerpo cuando visto desde el sistema O es: $E_c = \dfrac{1}{2}.\,m.\,(V_{m,O})^2$

Mientras que para el observador que ve las cosas desde O': $E_c' = \dfrac{1}{2}.\,m.\,(V_{m,O'})^2$

Si relaciono las velocidades con la Transformación de Galileo:

$$V_{m,O} = V_{m,O'} + V_{O',O} \xrightarrow{despejo} V_{m,O'} = V_{m,O} - V_{O',O}$$

Y si reemplazo en la expresión de E_c':

$$E_c' = \frac{1}{2}.\,m.\,(V_{m,O} - V_{O',O})^2 = \frac{1}{2}.\,m.\,(V_{m,O})^2 + \frac{1}{2}.\,m.\,(V_{O',O})^2 - \frac{1}{2}.\,m.2.\,V_{m,O}.V_{O',O}$$

Uso la expresión de la energía cinética en el sistema O:

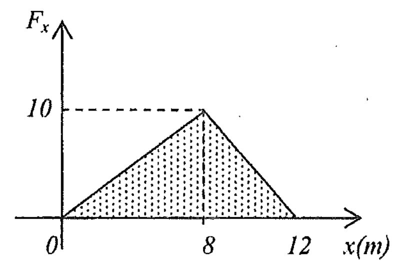
$$E_c' = E_c + \frac{1}{2}.\,m.\,(V_{O',O})^2 - m.\,V_{m,O}.V_{O',O}$$

Esta es la relación entre la energía cinética observada desde O y desde O'.

6. A un objeto de 5 *kg* que se puede mover según el eje *X*, se le aplica una fuerza cuya componente F_x varía según el siguiente gráfico. Calcule el trabajo realizado por el vector $\vec{F}$ entre $x = 0$ m y $x = 12$ m. Grafique el trabajo en función de x y la velocidad del objeto en función de x, considerando que parte del reposo.

Este problema puede resolverse de dos formas, la más sencilla es por integración gráfica, calculando el área debajo de la gráfica de *F*, y sabiendo que esa área representa el valor del trabajo de la fuerza. En efecto, cuando la fuerza es variable, su trabajo se calcula como:

$$W = \int_{x_0}^{x_F} F_x.dx$$



Y esta integral, cuando la fuerza es positiva, es el área del gráfico que nos dan. Así que, por ejemplo, para el trabajo desde $x_o = 0$, hasta $x_f = 12$, basta calcular el área como la de un sólo triángulo:

$$W = \frac{b.h}{2} = \frac{12m\,.\,10\text{N}}{2} = 60\ J$$

A propósito: ¿por qué dice F_x? La respuesta es que el trabajo está definido para el vector fuerza, pero lo que va en la fórmula es su componente en la dirección de movimiento (que es el producto "$|F|.\cos(\alpha)$"o "F_x"). O sea, nos dan la función que debo integrar en la variable "x".

Como mencionamos al empezar, existe otra forma de hacer el ejercicio, que tiene más que ver con las cosas de análisis matemático que hemos aprendido. Y que nos permite contestar todas las preguntas del problema. Empecemos por sacar las ecuaciones de las rectas que nos muestran en la gráfica:

① la primera tiene pendiente: $m = \frac{10-0}{8-0} = 1{,}25$ y ordenada al origen $b = 0$: $y = 1{,}25.x$

② la segunda tiene pendiente: $m = \frac{0-10}{12-8} = -2{,}5$ y pasa por (12 , 0), reemplazo:

$$y = -2{,}5.x + b \xrightarrow{x=12\ ,\ y=0} b = 30 \rightarrow y = -2{,}5.x + 30$$

La expresión analítica de la función graficada es: $\begin{cases} y = 1{,}25.x & si \quad 0 \le x \le 8 \\ y = -2{,}5.x + 30 & si \; 8 \le x \le 12 \end{cases}$

Y para sacar el trabajo para cualquier punto "x", debemos resolver la integral de esta función hasta ese punto "x". Como sabemos, debemos considerar dos casos:

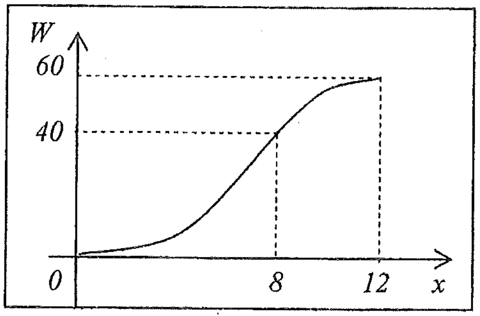
1) si $x \le 8$ ... $W = \int_0^x 1{,}25.x \; dx = 1{,}25.\dfrac{x^2}{2} = 0{,}625.x^2$

2) si $x > 8$ ... $W = \int_0^8 1{,}25.x \; dx + \int_8^x (-2{,}5.x + 30) \; dx = 1{,}25.\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^8 + (-1{,}25.x^2 + 30.x)\Big|_8^x$

$$W = 40 + (-1{,}25.x^2 + 30.x) - (160) = -120 - 1{,}25.x^2 + 30.x$$

Para calcular el trabajo realizado hasta la posición final x = 12 m, basta reemplazar en esta segunda expresión (caso $x > 8$):

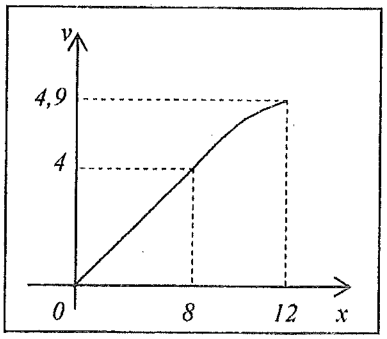
$$W = -120 - 1{,}25.(12)^2 + 30.(12) = 60 \; J \quad \checkmark$$



El mismo resultado que saqué con el área del triángulo.
Para el gráfico del trabajo, debo construir las dos parábolas que corresponden a los casos $x < 8$ y $x > 8$. Las podemos hacer con una tabla de valores, o usando conocimientos de análisis 1 (máximos, crecimiento, concavidad ...). Debe dar algo así.
Y para la velocidad, uso el Teorema de las Fuerzas Vivas, considerando que arranca del reposo:

$$\Delta E_c = W^{Total} \xrightarrow{despejando} v_f = \sqrt{\frac{2.W^T}{m}}$$

Es decir, también hay dos gráficas que construir, para cada expresión hallada del trabajo:



$$si \quad 0 \le x \le 8: \; v_f = \sqrt{\frac{2.0{,}625.x^2}{5}} = 0{,}5.x$$

$$si \quad 8 \le x \le 12: \; v_f = \sqrt{\frac{2.\left(-120 - 1{,}25.x^2 + 30.x\right)}{5}}$$

7. Calcule el trabajo de la fuerza Peso a lo largo de una trayectoria cerrada cualquiera. ¿Puede generalizarse a cualquier trayectoria? ¿Qué utilidad tiene esa propiedad? ¿Es la fuerza peso la única que la presenta? ¿Cómo se llaman las fuerzas que presentan esta propiedad, por qué reciben ese nombre? Dé varios ejemplos.

Las Fuerzas Conservativas

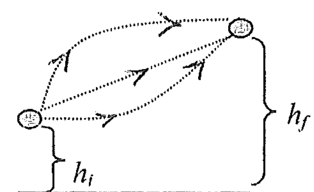
Una fuerza se llama conservativa si cumple cualquiera de estas tres propiedades:

i) su trabajo en una trayectoria cerrada vale siempre cero.

ii) su trabajo no depende del camino que siga el cuerpo, sólo del punto de partida y de llegada.

iii) su rotor es nulo, o lo que es lo mismo sus derivadas mixtas son iguales: si

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1,2,3)$$



Como dijimos, cualquiera de las tres propiedades que se cumpla implica que se cumplen las otras. La segunda es muy útil: una fuerza conservativa permite que su trabajo se calcule sin conocer con que trayectoria se viajó. Por ejemplo, en el caso del peso, su trabajo se calcula ***siempre*** como:

$$W^{Peso} = M.g.h_i - M.g.h_f$$

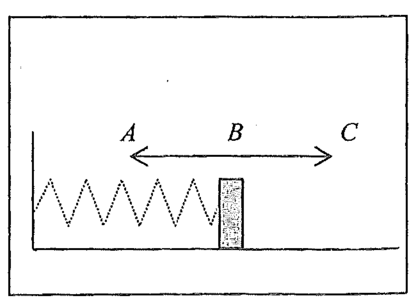
Todas las fuerzas conservativas tienen entonces una fórmula para calcular su trabajo, sin importar la trayectoria. Otras fuerzas con la misma propiedad son la fuerza elástica (cuyo trabajo se calcula como $W^{elástica} = \frac{1}{2}.k.(\Delta l_i)^2 - \frac{1}{2}.k.(\Delta l_f)^2$), y la fuerza gravitatoria.

Generalizando: para cada fuerza conservativa la integral que define el trabajo se puede poner como la diferencia entre cierta magnitud en el estado inicial menos la misma magnitud final. De esta forma puedo escribir

$$W^{F.Cons} = E_{pot,i} - E_{pot,f} = -\Delta E_{pot}$$

8. Una partícula de masa m está unida a un resorte de constante elástica k. El resorte se estira una distancia a y se lo suelta. Relacione la energía potencial de la partícula en función de x con su energía cinética. ¿En qué posiciones son nulas? ¿En qué posiciones son máximas o mínimas?

Tenemos un cuerpo sometido a la acción de la fuerza elástica de un resorte. Cuando el cuerpo se lo lleva a la posición C, el resorte queda estirado, y en cuanto liberemos el sistema y en ausencia de rozamiento, se producirá una oscilación simétrica alrededor de la posición de equilibrio B. En esta oscilación la energía mecánica es constante, ya que las fuerzas no conservativas (es decir, la Normal) no hacen trabajo.



- En los dos extremos A y C el cuerpo tiene energía elástica máxima, porque acumula el mayor apartamiento de su longitud natural l_0. Pero son las dos posiciones donde la energía cinética es nula, porque el cuerpo queda sin velocidad.
- en la posición central B, es cuando la energía elástica es cero (el resorte no está deformado), por lo tanto es máxima la energía cinética.

Recordar que para estas energías los mínimos valores son cero

9. Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado del radio, $F = -k/r^2$. La trayectoria es un círculo de radio r. Muestre que (a) la energía total es $E = -k/2r$, (b) la velocidad es $v = (k/mr)^{1/2}$ y (c) el momento angular es $L = (mkr)^{1/2}$. Relacione lo visto en este problema con lo que sucede a una partícula que se mueve en órbitas circulares alrededor de la Tierra.

Primero voy a buscar una expresión para la energía potencial E_P que corresponde a esta fuerza. Para eso uso la definición que dimos en la página anterior:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -\left(\Delta E_p\right) = -E_{P,B} + E_{P,A}$$

Donde B es la posición final y A es la inicial.

Entonces, planteo la integral: $W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B \frac{-k}{r^2}\,dr = \frac{k}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{k}{r_B} - \frac{k}{r_A}$

Por comparación podemos definir la energía potencial para cada punto del espacio como $E_P = -\frac{k}{r}$.

Tenemos así una función que sólo depende del punto $\boldsymbol{r}$, y cuya variación cambiada de signo nos da el trabajo de la fuerza. También debo ver la energía cinética que tiene el objeto que se encuentra girando. Usamos las expresiones del movimiento circular:

$$\sum_{eje\ r} F = m.a_c \xrightarrow{|F|=\frac{k}{r^2}} \frac{k}{r^2} = m.\frac{v^2}{r} \xrightarrow{simplifico} \frac{k}{r} = m.v^2 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2}.\frac{k}{r} = \overbrace{\frac{1}{2}.m.v^2}^{E_C}$$

Y la energía mecánica es la suma de la potencial más la cinética:

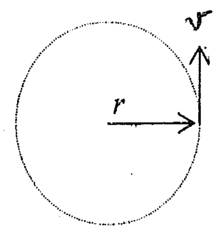
$$E_{mec.} = E_p + E_c = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2}.\frac{k}{r} = -\frac{1}{2}.\frac{k}{r} \quad ✓$$

El signo menos proviene de que la E_p es negativa, y tiene poca importancia, porque físicamente, lo único relevante es la ***diferencia de energía potencial***. Es decir, es como si en un problema de energía gravitatoria yo pusiera el nivel $h = 0$ en la parte más alta de la trayectoria del cuerpo. Todas las energías gravitatorias serían entonces negativas, porque las alturas del cuerpo estarían siempre por debajo de 0. Pero eso no cambiaría la física de las cosas, es una elección arbitraria.

b) la velocidad la despejo de la expresión hallada para la energía cinética:

$$\frac{1}{2}.\frac{k}{r}=\overbrace{\frac{1}{2}.m.v^2}^{E_C}\xrightarrow{despejo} v=\sqrt{\frac{k}{m.r}}\quad\checkmark$$

c) el momento angular es el producto vectorial entre la posición y la cantidad de movimiento. Como vimos en el cuadernillo 1/2, si estos vectores son perpendiculares (es un movimiento circular, ver dibujo) entonces vale:



$$\overline{L}=\overline{r}\times\overline{p}\;\rightarrow\;|L|=r.m.v.\overbrace{sen(90)}^{1}$$

Reemplazando la expresión de la velocidad:

$$|L|=r.m.\sqrt{\frac{k}{m.r}}\xrightarrow{meto\ en\ la\ raíz} L=\sqrt{m^2.r^2\frac{k}{m.r}}=\sqrt{m.r.k}\quad\checkmark$$

Esto que acabamos de ver se puede usar para el caso de cualquier fuerza de la forma atractiva e inversamente proporcional al cuadrado del radio. De este estilo son las fuerzas gravitatorias estudiadas en el CBC, y las fuerzas de Coulomb entre cargas que aparecen en Física II

10. Un cuerpo de 20 kg de masa es lanzado verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 50 m/s. Calcule (a) las energías E_c, E_p y E iniciales; (b) E_c, y E_p después de 3 s; (c) E_c y E_p a 100 m de altura; (d) la altura del cuerpo cuando E_c se reduce un 80 % de su valor inicial. Sitúe el cero de energía potencial en la superficie terrestre. (e) Resuelva nuevamente si la velocidad inicial es v_o = **i** 20 m/s + **j** 50 m/s. Compare ambos resultados.

a) las energías iniciales valen:

$$E_c=\tfrac{1}{2}.20\,kg.(50\tfrac{m}{s})^2=25000j \qquad E_p=\overbrace{M.g.H}^{H=0}=0 \quad y \quad E_{mec}=E_c+E_p=25000j$$

b) en el ascenso la velocidad cambia. Necesito plantear la cinemática del tiro vertical para encontrarla:

$$\begin{cases} y=y_o+v_o.t-\frac{1}{2}.g.t^2=50\frac{m}{s}.3s-5\frac{m}{s^2}.9s^2=105\,m \\ v=v_o-g.t=50\frac{m}{s}-10\frac{m}{s^2}.3s=20\frac{m}{s} \end{cases}$$

Con estos valores tenemos: $E_c=\frac{1}{2}.20\,kg.(20\frac{m}{s})^2=4000j \quad E_p=20\,kg.10\frac{m}{s^2}.105\,m=21000j$

Y sumando $$E_{mec}=E_c+E_p=25000j$$

Observar que la energía mecánica vuelve a darnos el mismo valor que en (a). Es decir, aunque el cuerpo cambió de energía cinética porque disminuyó su velocidad, y aumentó su energía potencial, la energía mecánica se mantuvo sin cambios. Esto tiene que ver con que en el planteo estamos suponiendo la sola acción de la fuerza Peso, que es una fuerza conservativa, es decir que no cambia la Energía Mecánica de un cuerpo.

c) a 100 m de altura la energía potencial vale $E_p = 20\,kg.10\frac{m}{s^2}.100\,m = 20\,000\,j$

Pero vamos a aprovechar el análisis que hicimos en la parte (b) para no tener que volver a usar cinemática. Podemos decir que como la energía se conserva, la energía mecánica sigue valiendo $E_{mec} = E_c + E_p = 25\,000\,j$. Como conozco la energía potencial puedo despejar:

$$E_{mec} = E_c + \overbrace{E_p}^{20000\,j} = 25\,000\,j \xrightarrow{despejo} E_c = 5000\,j$$

d) Cuando la energía cinética se reduce un 80% de la inicial significa que le queda 20 % de 25000 j, es decir 5000 j. Con esta energía cinética, sabiendo que la mecánica es siempre 25 000j constantes, podemos despejar:

$$E_{mec} = \overbrace{E_p}^{M.g.H} + \overbrace{E_c}^{5000\,j} = 25\,000\,j \xrightarrow{despejo} H = \frac{20\,000\,j}{20\,kg.10\frac{m}{s^2}} = 100\,m$$

e) en el caso de tener una velocidad inicial con dos componentes, estamos en presencia de un tiro oblicuo. Por lo que vimos en el CBC, sabemos que la componente v_x permanece sin cambios en toda la trayectoria. Hacemos de nuevo (a)

$$E_c = \frac{1}{2}.20\,kg.(\sqrt{(20)^2 + (50)^2})^2 = 29\,000\,j$$

$$E_p = \overbrace{M.g.H}^{H=0} = 0 \quad \text{y} \quad E_{mec} = E_c + E_p = 29\,000\,j$$

b) 3 segundos después de haber partido, la componente v_y habrá disminuido a 20$\frac{m}{s}$ como nos mostraron las ecuaciones del tiro vertical que planteamos antes. Pero la velocidad en ese momento será el vector $v = 20\frac{m}{s}\,\hat{i} + 20\frac{m}{s}\,\hat{j}$. Calculo:

$$E_c = \tfrac{1}{2}.20\,kg.(\sqrt{(20)^2 + (20)^2})^2 = 8\,000\,j$$

Y de la conservación de la energía mecánica saco

$$E_{mec} = \overbrace{E_c}^{8000\,j} + E_p = 29\,000\,j \xrightarrow{despejo} E_p = 21\,000\,j$$

Observar que la energía potencial da el mismo resultado que en (b). Esto se debe a la llamada independencia de movimientos: le agregamos una velocidad horizontal, pero esto no afecta las cosas verticales, y a los 3 s vuelve a estar a la misma altura que en el caso del Tiro vertical.

(c) primero calculo: $E_p = M.g.H = 20\,kg.10\frac{m}{s^2}.100\,m = 20000\,j$

Reemplazo $$E_{mec} = \overbrace{E_p}^{20000j} + E_c = 29000j \xrightarrow{despejo} E_c = 9000j$$

(d) sacamos el 20% que le queda de los $29000j$ de energía cinética, $E_c = 5800j$

Reemplazo $$E_{mec} = \overbrace{E_c}^{5800j} + E_p = 29000j \xrightarrow{despejo} E_p = 23200j$$

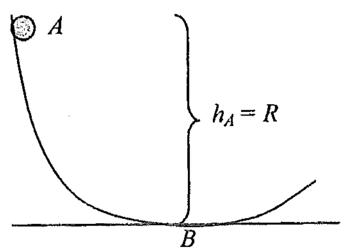
Atención: hay que tener cuidado, porque tratándose de un tiro oblicuo, el cuerpo nunca puede quedarse sin velocidad. En la altura máxima por lo menos le queda la v_x, por lo tanto su energía cinética mínima (en el vértice de la trayectoria) es:

$$E_c^{mín} = \tfrac{1}{2}.20\,kg.(\sqrt{20^2 + 0^2})^2 = 4000\,j$$

Así que la energía cinética de $5800j$ es posible y la energía potencial sacada es correcta.

11. Una pequeña piedra de 0,10 kg se deja caer desde su posición en reposo en el punto A, en el borde de un tazón hemisférico de radio R = 0,6 m. Suponer que la piedra es pequeña en comparación con R, de manera que puede tratarse como una partícula. El trabajo efectuado por el rozamiento sobre la piedra al bajar desde A hasta el fondo del tazón (B) es $-0{,}22j$ ¿qué velocidad tiene al llegar a B?

Uso el Teorema de variación de la energía mecánica entre los puntos A y B. Para eso observo que:



- en A el cuerpo parte del reposo, por lo tanto no tiene energía cinética, pero si tiene potencial. Su altura en ese punto coincide con el radio del tazón.
- a B el cuerpo llega con velocidad, pero sin energía potencial porque en ese punto tomé el nivel $h = 0$.
- entre A y B la energía no es constante, porque el rozamiento se robó $-0{,}22j$ (el trabajo que efectuó el rozamiento)

Planteo el Teorema:

$$E_B - E_A = \tfrac{1}{2}.m.(v_B)^2 - \overbrace{m.g.h_A}^{0,588\,j} = -0{,}22\,j \xrightarrow{despejo} v_B = \sqrt{\frac{0{,}588j - 0{,}22j}{0{,}05\,kg}} \cong 2{,}71\tfrac{m}{s} \checkmark$$

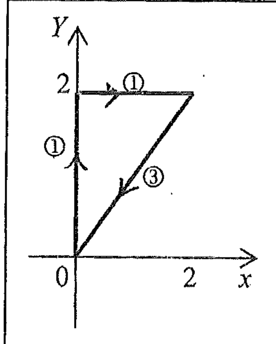
12. Una fuerza actúa sobre un punto material de manera que **F** = $3.x.y$ **i**, donde x e y son medidas en metros y la fuerza en newtons. El punto sigue una trayectoria rectilínea a lo largo del eje y desde $y =$ 0 m hasta $y = 2$ m. Luego paralela a x entre (0;2) hasta (2;2). Luego regresa al origen por una recta. Dibuje la trayectoria. Calcule el trabajo realizado por la fuerza en cada tramo y en el recorrido cerrado. ¿Es conservativa la fuerza? Explique

La fuerza **no** es conservativa, porque no satisface la igualdad de las derivadas cruzadas (ver página 8):

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial(3.x.y)}{\partial y} \neq \frac{\partial(0)}{\partial x}$$

Por lo tanto, para calcular el trabajo vamos a tener que integrar sobre las trayectorias (este tema se aprende en Análisis 2, corresponde al tema integrales de trayectoria).

Trayectoria



① Parametrizamos el segmento que une los puntos (0,0) a (0,2):

$C_{(t)} = (0\,;t)\ ;\ 0 \le t \le 2$

$$W_a = \int_0^2 \vec{F}_{(C)}.\vec{C}'\,dt = \int_0^2 (3.0.t\,;0)\,(0\,;1)\,dt = \int_0^2 0\,dt = 0$$

② Parametrizamos el segmento que une los puntos (0,2) a (2,2):

$C_{(t)} = (t\,;2)\ ;\ 0 \le t \le 2$

$$W_b = \int_0^2 \vec{F}_{(C)}.\vec{C}'\,dt = \int_0^2 (3.t.2\,;0)\,(1\,;0)\,dt = \int_0^2 6.t\,dt = 3.t^2\Big|_0^2 = 12$$

③ Parametrizamos la recta $y = x$ que une (2,2) al (0,0):

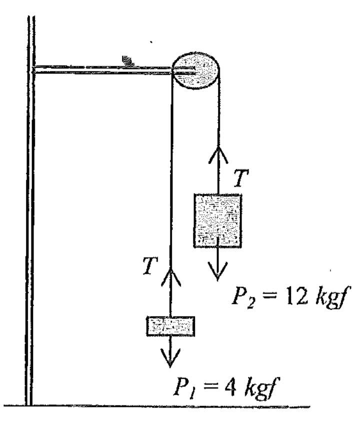
$C_{(t)} = (2-t\,;2-t)\ ;\ 0 \le t \le 2$

$$W_c = \int_0^2 \vec{F}_{(C)}.\vec{C}'\,dt = \int_0^2 (3.(t-2)(t-2);\,0)\,(1\,;1)\,dt = \int_0^2 3.(t-2)^2\,dt = (t-2)^3\Big|_0^2 = 8$$

Los tres segmentos forman una trayectoria cerrada, donde salimos del origen y volvemos al mismo punto. Pero sumando los tres trabajos no da cero, porque F **no** es conservativa. Esto se esperaba, por el resultado que vimos en el inicio del problema.

13. El sistema de la figura se suelta del reposo cuando el balde de pintura de 12 kg está a 2 m sobre el piso. Usando el principio de conservación de la energía, calcular la velocidad con que el balde golpea sobre el piso. Ignore el rozamiento y la masa de la polea.

Hay una pregunta que contestar antes de empezar a resolver el problema: me piden que use conservación de la energía, pero ¿se conserva la energía? Como suele ocurrir, la respuesta puede ser si o no. Si hablo para un cuerpo, ***entonces la energía no se conserva.*** Veamos porque: marqué en el esquema las fuerzas aplicadas a los dos cuerpos, y para ambos aparece una fuerza no conservativa (la Tensión), que al cuerpo que está en el piso le hace un trabajo positivo (lo ayuda a subir, es decir va a favor de su movimiento) mientras que al balde que está en el aire le hace trabajo negativo (el balde baja y la tensión es opuesta a ese movimiento).



En cambio, si miramos al sistema de dos cuerpos, la tensión es una fuerza interna que transfiere energía de uno al otro, pero que no cambia la energía del sistema. Esta es la clave del problema: ***plantear que la energía se conserva para el sistema de los dos cuerpos***, es decir para la suma de las dos energías mecánicas. Esto es bastante novedoso, porque si lo pensás, hasta aquí, en la guía sólo planteamos conservación o variación de energía para un cuerpo.

- Cuando el problema arranca, el cuerpo de 4 *kg* está en el piso y en reposo, sus energías se anulan. El balde tiene energía potencial, ya que se encuentra a 2 *m* sobre el piso, pero como también arranca del reposo su energía cinética es 0:

$$E_{Mec,sist.} = \overbrace{\tfrac{1}{2}.M_1.(v_{1,o})^2}^{0} + \overbrace{M_1.g.h_{1,o}}^{0} + \overbrace{\tfrac{1}{2}.M_2.(v_{2,o})^2}^{0} + M_2.g.h_{2,o} = 235{,}2\,j$$

- Cuando el balde llega al piso, el cuerpo de 4 *kg* llega a la altura de 2 *m*. Tanto el balde como este cuerpo tienen energía cinética, porque han ido ganando velocidad desde que empezó el movimiento. Y como la soga comunica el movimiento de los cuerpos, ambos deben tener la misma velocidad en todo instante:

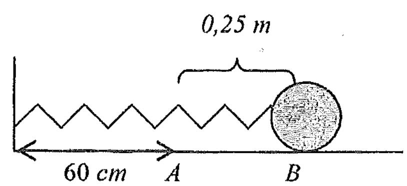
$$E_{Mec,sist.} = \tfrac{1}{2}.M_1.(v_{1,f})^2 + \overbrace{M_1.g.h_{1,o}}^{78,4} + \tfrac{1}{2}.M_2.(v_{2,f})^2 + \overbrace{M_2.g.h_{2,o}}^{0}$$

Igualo:

$$235{,}2\,j = 2kg.(v_f)^2 + 78{,}4\,j + 6\,kg.(v_f)^2 \xrightarrow{despejo} v_f = \sqrt{\frac{235{,}2 - 78{,}4}{8}} \cong 4{,}43\,\tfrac{m}{s}$$

14. Un bloque de 0,500 *kg* unido a un resorte de 0,60 *m*, con k = 40,0 N/m y masa despreciable, está en reposo en el punto A de una mesa horizontal lisa, tal como se indica en el esquema. Se tira del bloque hacia la derecha con una fuerza horizontal constante **F** = 20,0 N a. ¿qué velocidad tiene el bloque cuando pasa por el punto B, que está a 0,25 *m* a la derecha de A? b. En este punto se suelta el bloque. En el movimiento que sigue, ¿cuánto se acerca el bloque a la pared a la que está sujeto el extremo izquierdo del resorte?

Vamos a usar el teorema de variación de la energía mecánica. Para eso analicemos qué fuerzas tiene aplicadas el cuerpo: el Peso y la elástica son conservativas, la Normal es perpendicular al movimiento (por lo tanto no realiza trabajo). Y por último, la fuerza ***F***, que es ***no*** conservativa. Entonces entre el punto A y el B tengo:



- en A el cuerpo no tenía energía de ningún tipo, ya que el resorte no estaba deformado, y el cuerpo estaba en reposo.
- en B el cuerpo tiene energía elástica, ya que el resorte se encuentra estirado 0,25*m*, y tiene energía cinética, ya que fue ganando velocidad por acción de la fuerza ***F***.

• entre esos dos puntos, el trabajo de las fuerzas no conservativas es el trabajo de la fuerza ***F***, que como es una fuerza constante se puede calcular con la expresión:

$$W^F = |F|.\overbrace{\Delta x}^{d_{AB}}.\cos(\alpha) = 20\text{N}.0{,}25\,m.\cos(0) = 5\,j$$

Observar que el ángulo es 0°, porque esta fuerza apunta hacia la derecha, y el desplazamiento del cuerpo también es de A hacia B (es decir hacia la derecha).

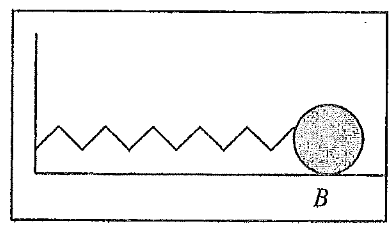
Planteo el Teorema:

$$W^{FNC} = E_B - \underbrace{E_A}_{0} \rightarrow\ 5\,j = (\overbrace{\tfrac{1}{2}.40\tfrac{N}{m}.(0{,}25m)^2}^{1{,}25\,j} + \tfrac{1}{2}.0{,}5\,kg.(v_B)^2) - (0)$$

$$\xrightarrow{despejo}\ v_B = \sqrt{\frac{5\,j - 1{,}25\,j}{0{,}25\ kg}} \cong 3{,}87\ \frac{m}{s} \quad \checkmark$$

b) Si en el punto B se suelta el bloque, el cuerpo se pondrá a oscilar. Pero ahora las fuerzas que actúan son conservativas (el Peso y la elástica) o bien no hacen trabajo (la Normal).

Es decir, a partir de que se saca la fuerza ***F*** no quedan fuerzas no conservativas en el problema que cambien la energía. Por lo tanto, podemos plantear la conservación. Lo que queremos determinar entonces es hasta qué punto C alcanzará a llegar cuando lo soltemos. Para eso observemos que:



• cuando lo soltamos en B la energía es la que tenemos del punto anterior, es la suma de la cinética y la elástica.

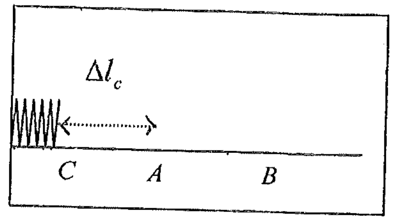
Cuidado: no sale del reposo, porque dice que al llegar a B deja de actuar F, pero no dice que alguien lo detenga.

• cuando llega al punto C el cuerpo sólo tiene energía elástica, ya que el resorte estará comprimido. No tiene energía cinética porque en ese punto el cuerpo se queda sin velocidad (considerando que C es el punto de mayor acercamiento a la pared, es el punto donde se detiene en el retroceso)

Como dijimos que no hay fuerzas no conservativas que hagan trabajo, el teorema se plantea así:

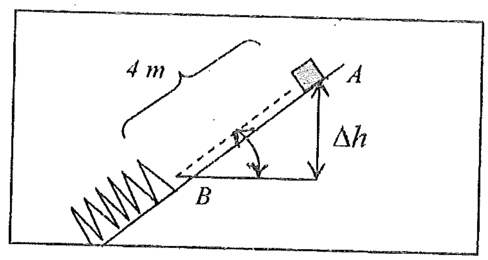
$$0 = E_C - \underbrace{E_B}_{5\,j} \rightarrow\ 5\,j = \tfrac{1}{2}.40\tfrac{N}{m}.(\Delta l_C)^2 \ \xrightarrow{despejo}\ \Delta l_C = \sqrt{\frac{5}{20}} = 0{,}5\,m$$

Pero como la pregunta es a cuánto queda ***de la pared***, y lo calculado es lo que se comprime el resorte desde su estado de relajación en A, entonces restamos y contestamos que lo más cerca que queda de la pared al retroceder son 10 *cm*.



15. Un paquete de 2,00 *kg* se suelta sobre un plano inclinado de pendiente 53.1° a 4,00*m* de un resorte largo de masa despreciable con k = 140 N/m sujeto a la base de la pendiente. Los coeficientes de rozamiento entre el paquete y el plano son $\mu_S = 0{,}4$ y $\mu_K = 0{,}20$.
a) ¿Qué velocidad tiene el paquete justo antes de llegar al resorte?
b) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte?
c) Al rebotar, ¿cuánto se acerca a su posición inicial?

Definamos dos puntos de la trayectoria para trabajar por energía: el punto inicial A de donde se suelta al paquete, y el B que es donde el paquete está por tocar al resorte.



Para poder plantear el Teorema de energía necesito encontrar la diferencia de altura entre los puntos A y B. Miremos el dibujo:

Como se puede observar, nos queda formado un triángulo rectángulo donde Δh es el cateto opuesto, y la hipotenusa vale 4*m* (es el desplazamiento por el plano inclinado):

$$sen(53{,}1) = \frac{\Delta h}{4m} \rightarrow \Delta h = 3{,}2\,m$$

Si medimos la altura en el nivel de B, entonces esta es la altura del punto A. Ya estamos listos para plantear el teorema, teniendo en cuenta que:

- cuando sale de A estaba en reposo, sólo tenía energía potencial
- cuando llega a B, no tiene energía elástica porque aun no comprime al resorte, sólo tiene energía cinética, porque la altura la medimos desde ese nivel
- entre estos puntos existe el rozamiento, que es la fuerza no conservativa que hace trabajo y varía la energía mecánica. Para calcularla debemos usar la expresión:

$$W_{AB}^{roz} = F_r.d.\cos(\alpha) = \mu_K.N.4m.\cos(180)$$

Y la Normal es igual a la componente P_y, entonces:

$$W_{AB}^{roz} = 0{,}2.\overbrace{M.g.\cos(53{,}1°)}^{P_y=11{,}8}.4m.(-1) = -9{,}4\,j$$

El teorema de la energía mecánica nos queda así:

$$W^{FNC} = E_B - E_A \rightarrow \ -9{,}4\,j = \tfrac{1}{2}.M.(v_B)^2 - \overbrace{M.g.h_A}^{62{,}72\,j} \xrightarrow{despejo} v_B \cong 7{,}3\tfrac{m}{s} \quad \checkmark$$

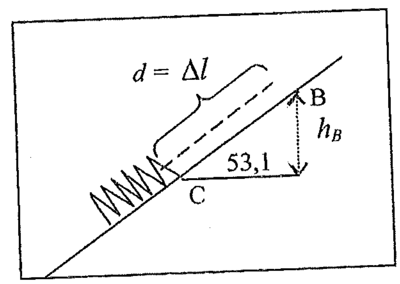
b) Para la compresión máxima volvemos a plantear el teorema, teniendo ahora en cuenta los puntos B y C (el de máxima compresión). Por comodidad, vamos a considerar el nivel 0 de altura en el punto C (así no trabajamos con alturas negativas), por lo tanto:

- cuando está en B, además de la energía cinética que calculamos en la parte A, tenemos energía potencial porque está por encima del nuevo nivel 0 de altura
- cuando llega a C tiene sólo energía elástica, porque ese es el nivel 0 de altura (no hay potencial) y en ese lugar se detiene.
- entre esos dos puntos sigue haciendo trabajo el rozamiento, esta vez sobre una distancia desconocida.

Pero observemos en el dibujo dos cosas:

① el desplazamiento d en la fórmula del rozamiento es igual a la compresión Δl del resorte (recordar que en B el resorte estaba relajado)

② el desplazamiento d es la hipotenusa del triángulo que se forma, y la diferencia de nivel de altura entre los dos puntos es el cateto opuesto, por trigonometría:



$$\underbrace{sen(53{,}1)}_{0{,}8} = \frac{h_B}{d} \rightarrow h_B = 0{,}8.d$$

Planteo energía:

$$W^{FNC} = E_C - E_B \quad \rightarrow \quad -\mu_K.P_y.d = \left(\tfrac{1}{2}.K.(\underbrace{\Delta l}_{d})^2\right) - \left(\tfrac{1}{2}.M.(v_B)^2 + M.g.\underbrace{h_B}_{0{,}8.d}\right)$$

Reemplazando los datos me queda una ecuación cuadrática:

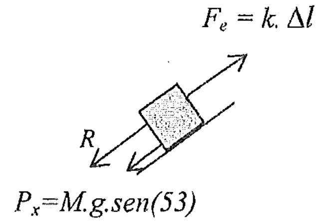
$$-2{,}35.d = 70.d^2 - (53{,}3 + 15{,}7.d) \quad \rightarrow \quad 0 = 70.d^2 - 13{,}35.d - 53{,}3$$

Las soluciones de esta ecuación son: $d_1 = 0{,}97\ m$ y $d_2 = -0{,}78\ m$

La primera respuesta es la que sirve, ya que es la que me da para el punto *B* una altura positiva.

c) este es un problema con trampa, ya que antes de analizar por energía cuánto sube en el rebote, debo asegurarme por dinámica que el cuerpo efectivamente vuelva a subir. Es decir, tengo que estar seguro que cuando termine de comprimir el resorte, este haga una fuerza suficientemente grande como para rebotarlo.

En el esquema te muestro un DCL cuando el cuerpo llega al punto C: tenemos en la dirección paralela al plano la acción del P_x, la fuerza elástica hacia arriba, y el rozamiento.



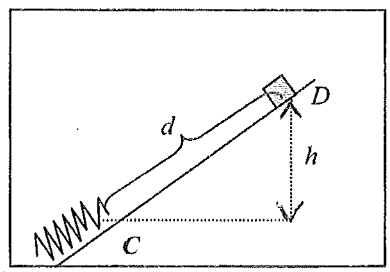
Esta fuerza será por un instante la estática, y veamos si alcanza para equilibrar al cuerpo. De la 2da Ley de Newton despejo la fuerza de rozamiento necesaria para que haya equilibrio:

$$F_e - P_x - R_{est.} = 0 \xrightarrow{despejo} R_{est.} = F_e - P_x = \underbrace{k.\Delta l}_{\cong 136} - \underbrace{M.g.sen(53{,}1)}_{15{,}7} \cong 120{,}3\,\mathrm{N}$$

El valor máximo del rozamiento (caso estático) es: $R_{Máx} = \mu_S.\underbrace{M.g.\cos(53{,}1)}_{N} \cong 4{,}7\,\mathrm{N}$

Como vemos es mucho menor que el necesario para que haya equilibrio, por lo tanto el cuerpo saldrá rebotado hacia arriba. Entonces, planteemos por energía el rebote hacia arriba. Para eso tomo el punto C del que parte hasta el punto D donde termine el rebote.

- En C la energía es elástica (el valor lo tenemos del punto anterior)
- En D la energía es potencial gravitatoria (ya no tiene velocidad)
- Entre ambos puntos, el rozamiento hace trabajo



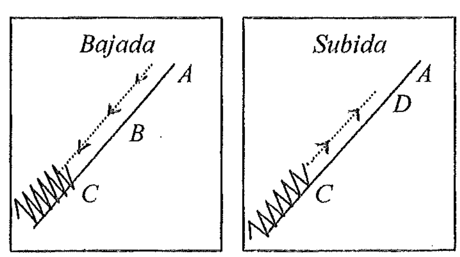
Usando nuevamente que la relación entre el desplazamiento d para el cálculo del trabajo del rozamiento, y la altura h que sube el cuerpo, está dada por trigonometría: $h = d\,.\,sen(53{,}1)$. Planteo energía:

$$W^{FNC} = E_C - E_B \quad \rightarrow \quad -\mu_K.P_y.d = M.g.\underbrace{h_B}_{0{,}8.d} - \left(\tfrac{1}{2}.K.(\underbrace{\Delta l}_{0{,}97m})^2\right)$$

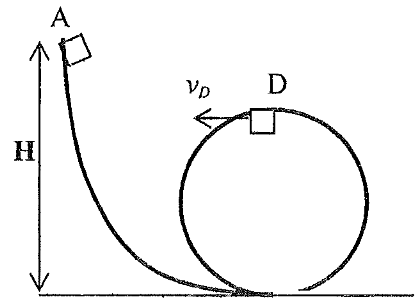
Reemplazo y hago las cuentas:

$$-3{,}136.d = 11{,}7.d - (66\,j) \xrightarrow{despejo} d = \frac{66}{11{,}7 + 3{,}136} \cong 4{,}45\,m$$

Y para terminar la respuesta, se nos pide la distancia a la que queda respecto del punto A del que salió. Para eso, debo sumar la distancia que usamos en (a) $d_{AB} = 4\ m$; con la distancia que calculamos en (b) $d_{BC} = 0{,}97\ m$. Es decir, en la caída había bajado 4,97 m. Como ahora en el rebote subió $d_{CD} = 4{,}45\ m$, entonces quedó a 0,52 m del punto A.



16.(a) ¿Desde qué altura mínima **H** se debe dejar deslizar el bloque de hielo para que pueda recorrer sin problemas el rulo BCDE. Si **h** = **2/3 H**, describa el movimiento posterior del bloque. (b) Si **H** = **3.R** ¿cuánto vale la reacción en el vínculo, sobre el bloque, en los puntos B, C, D y E (α=20°); ¿qué fuerza soporta el riel? (c) ¿en qué punto se desprende de la pista si **H** = **2.R**? (d) ¿Con qué velocidad mínima debe pasar por A, si **H** = **2.R** para que dé la vuelta completa?



Hay que tener cuidado de no confundirse entre la **h** (minúscula) y **H** (mayúscula) que son cosas distintas en el dibujo. Empiezo por calcular de qué altura **H** debe soltarse al cuerpo para que alcance a completar un giro. Como no existe rozamiento, la energía mecánica del cuerpo es constante. Entonces, igualaremos la energía en A con la de D. Para plantear correctamente el ejercicio hay que observar que a D el cuerpo debe llegar con cierta velocidad mínima, caso contrario se caería sin poder hacer un giro.

Los giros y la velocidad crítica

Esta velocidad la llaman crítica y se saca planteando dinámica del circular en ese punto:

$$\textit{radial)}\quad N + P = m.\frac{v^2}{R}$$

Es importante entender que el caso crítico ocurre cuando el cuerpo al llegar al punto más alto pierde el contacto con la pista, es decir cuando la Normal es nula. Técnicamente, habría que poner la condición de que no pierda contacto, pero esta Normal tienda a cero para que sea el instante en que está por perder contacto. Es como tomar límite cuando N tiende a cero, y nos queda:

$$\textit{radial)}\quad N + P = m.\frac{v^2}{R} \xrightarrow{\textit{saco crítico}} P = m.\frac{v_{crit}^{\,2}}{R} \xrightarrow{\textit{despejo}} v_{crit} = \sqrt{g.R}$$

Uso esta velocidad mínima para el punto D, y que h_d= 2.R:

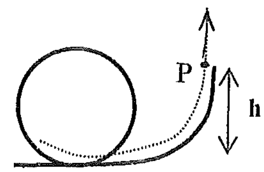
$$E_A = E_D \;\rightarrow\; \cancel{M}.g.H = \tfrac{1}{2}.\cancel{M}.\left(\sqrt{g.R}\right)^2 + \cancel{M}.g.(2.R)$$

$$\xrightarrow{\textit{despejo}} \cancel{g}.H = \tfrac{1}{2}.\cancel{g}.R + 2.\cancel{g}.R$$

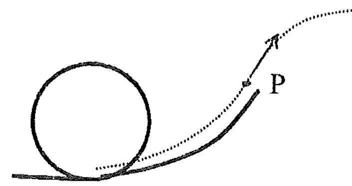
Nos queda así que la altura mínima **H** de donde debe caer para pasar justo es $\frac{5}{2}.R$.

Si el cuerpo completa el giro y sale del otro lado del "loop", como la 2^{da} altura tiene **h** < **H**, el cuerpo llegará a ese punto con velocidad (por conservación de la energía: a menor altura, mayor cinética) y por lo tanto, saldrá "volando". En ese caso tenemos dos posibilidades que no quedan muy claras en el dibujo:

i) si en P la pista se puso vertical hacia arriba, entonces subirá haciendo un tiro vertical, volverá a caer en P, y retrocederá por la pista. En ese caso, por conservación de la Energía, vuelve a completar el giro al revés y llega al punto A, para luego volver a caer y repetir la oscilación



ii) si en el punto P, la pista está inclinada en forma oblicua, entonces saldrá en un tiro oblicuo y ya no vuelve al circuito.



(b) Para calcular la reacción de vínculo ("Normal") debo hacer el DCL y escribir la ecuación de Newton en cada uno de los puntos. Pero antes, voy a calcular por Energía el valor de la velocidad en cada punto (las vamos a necesitar para encontrar la a_c)

En B sólo hay energía cinética, usando que $h_A = 3.R$

- $E_A = E_B \;\rightarrow\; \cancel{M}.g.(3.R) = \frac{1}{2}.\cancel{M}.v_B^{\;2} \xrightarrow{despejo} v_B = \sqrt{6.g.R}$

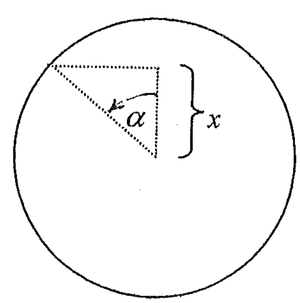
En C también hay energía, usando que $h_c = R$

- $E_A = E_C \;\rightarrow\; \cancel{M}.g.(3.R) = \frac{1}{2}.\cancel{M}.v_C^{\;2} + \cancel{M}.g.(R) \xrightarrow{despejo} v_C = \sqrt{4.g.R}$

En D usamos que $h_D = 2.R$

- $E_A = E_D \;\rightarrow\; \cancel{M}.g.(3.R) = \frac{1}{2}.\cancel{M}.v_C^{\;2} + \cancel{M}.g.(2R) \xrightarrow{despejo} v_D = \sqrt{2.g.R}$

Finalmente en E, vamos a calcular la altura, para expresar la energía potencial. Como vemos en el dibujo, el segmento x es el cateto adyacente del triángulo punteado. Por trigonometría, $x = R.\cos(\alpha)$, y la altura total desde el piso es:

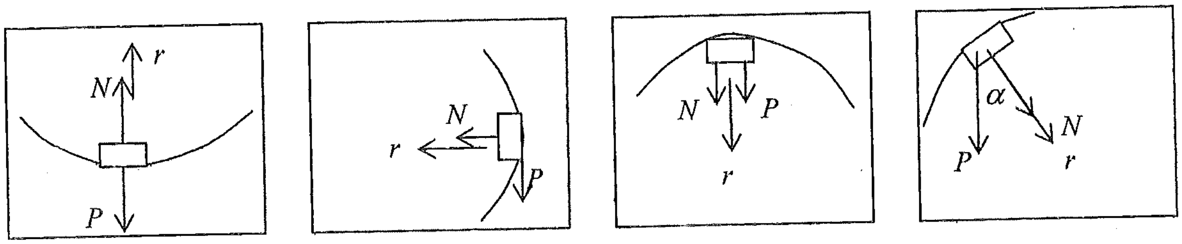


$$H_E = R + R.\cos(\alpha)$$

Por lo tanto para $\alpha = 20°$, se tiene $H_E = R.(1+\cos(20)) \cong 1{,}94\,R$

- $E_A = E_E \rightarrow \cancel{M}.g.(3.R) = \frac{1}{2}.\cancel{M}.v_E{}^2 + \cancel{M}.g.(1{,}94.R) \xrightarrow{despejo} v_E = \sqrt{2{,}12.g.R}$

Y ahora planteamos la 2^{da} ley de Newton en cada uno de los puntos, poniendo en cada punto el eje "r" hacia el centro, y sumando o restando a la Normal la componente del peso:



$$N - P = M.\frac{(v_B)^2}{R} \qquad N = M.\frac{(v_C)^2}{R} \qquad N + P = M.\frac{(v_D)^2}{R} \qquad N + P.\cos\alpha = M\frac{(v_E)^2}{R}$$

Reemplazamos la velocidad que ya averiguamos para cada punto y despejamos:

$$N_B = M.g + M.\frac{\left(\sqrt{6.g.R}\right)^2}{R} = M.g + 6.M.g = 7.M.g$$

$$N_C = M.\frac{\left(\sqrt{4.g.R}\right)^2}{R} = 4.M.g \qquad \text{y} \qquad N_D = -M.g + M.\frac{\left(\sqrt{2.g.R}\right)^2}{R} = M.g$$

$$N_E = -M.g.\cos(\alpha) + M.\frac{\left(\sqrt{2{,}12.g.R}\right)^2}{R} = -0{,}94\,M.g + 2{,}12.M.g = 1{,}18.M.g$$

Como sabemos, la fuerza que soporta el riel es igual y de sentido contrario, por el 3^{er} principio, a la que recibe el cuerpo de parte del riel, es decir a estas normales que sacamos. ***No*** es el peso del cuerpo.

Como la masa del cuerpo es $0{,}1\ kg$, usando $g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$ se obtienen los resultados:

$N_B = 6{,}86$ N ; $N_C = 3{,}92$ N ; $N_D = 0{,}98$ N ; $N_E = 1{,}16$ N ;

(c) vamos a aprovechar el planteo que hicimos para el punto E, poniendo un ángulo α desconocido (o sea sin reemplazarlo por 20°). La velocidad en ese punto se saca por conservación de la energía usando que la altura es $H_x = R.(1+\cos(\alpha))$:

- $E_A = E_x \quad \rightarrow \quad M.g.(2.R) = \frac{1}{2}.M.v_x^{\,2} + M.g.R.(1+\cos(\alpha))$

De aquí despejo la velocidad en el punto desconocido, en función de α:

$$2.g.R = \tfrac{1}{2}.v_x^{\,2} + g.R + g.R.\cos(\alpha) \xrightarrow{despejo} v_x = \sqrt{2.g.R.(1-\cos(\alpha))}$$

Y ahora reemplazo en la ecuación de la 2^{da} ley de Newton para el punto E, pero dejando expresado el ángulo α como desconocido:

$$N + P.\cos\alpha = M\frac{(v_x)^2}{R} \xrightarrow{reemplazo} N_x + M.g.\cos(\alpha) = M.\frac{\left(\sqrt{2.g.R.(1-\cos(\alpha))}\right)^2}{R}$$

Ahora digamos que si en el punto que estamos buscando, el cuerpo pierde el contacto con la pista, su Normal debe hacerse 0. Reemplazo en esta ecuación, y simplificando despejo:

$$\cancel{M}.g.\cos(\alpha) = \cancel{M}.\frac{2.g.\cancel{R}.(1-\cos(\alpha))}{\cancel{R}} \rightarrow \cos(\alpha) = 2 - 2.\cos(\alpha) \rightarrow \alpha = arc\cos\left(\tfrac{2}{3}\right) \cong 48{,}2°$$

Este es el valor del ángulo para el cual se pierde el contacto. Si queremos saber qué altura sobre el piso representa esto, reemplazo α en la expresión:

$$H_x = R.(1+\cos(\alpha)) = \tfrac{5}{3}.R$$

(d) El planteo es muy similar al que hicimos en la 1^{ra} parte. Pero esta vez, al salir de A usemos que hay cierta velocidad inicial desconocida, y no nos olvidemos de pedir que en el punto más alto D la velocidad sea como mínimo la crítica, como hicimos en (a):

$$E_A = E_D \rightarrow \cancel{M}.g.H_A + \tfrac{1}{2}.\cancel{M}.v_A^{\,2} = \tfrac{1}{2}.\cancel{M}.\left(\sqrt{g.R}\right)^2 + \cancel{M}.g.(2.R)$$

Despejamos

$$g.2.R + \tfrac{1}{2}.v_A^{\,2} = \tfrac{1}{2}.g.R + g.2.R \rightarrow v_A = \sqrt{g.R} \cong 2{,}21\tfrac{m}{s}$$

17. Analice el movimiento de un péndulo ideal desde el punto de vista energético. Para el péndulo oscilando exprese, como función de la altura de la masa: (a) su velocidad; (b) su desplazamiento angular;

(c) la fuerza tangencial a su trayectoria; (d) su aceleración tangencial; (e) su aceleración normal. ¿Cuánto vale la tensión en el hilo al pasar la lenteja por: la posición de equilibrio; la máxima elongación; $\alpha = \alpha_{máx}/2$?; (f) Si el péndulo se engancha en un clavito (A), ubicado 0,3 m por debajo del punto de suspensión (O) en la vertical (ver figura), ¿hasta qué altura subirá la lenteja?

En aquel problema teníamos la altura de la que se soltaba el péndulo ($h_i = 0{,}04\ m$) el largo del hilo $l = 1m$, y la masa del cuerpo $M = 0{,}6\ kg$

a) Para plantear la velocidad en función de la altura usamos el teorema de la energía mecánica. Para eso tengamos en cuenta que:

- cuando soltamos el péndulo, no tiene velocidad inicial
- las fuerzas que actúan en el camino son el peso y la tensión. Esta última es la única fuerza ***no*** conservativa, pero como es perpendicular al movimiento no realiza trabajo. En consecuencia, si $W^{FNC} = 0$ entonces la energía mecánica del péndulo no cambia:

$$E_A = E_B \rightarrow \cancel{M}.g.h_i = \tfrac{1}{2}.\cancel{M}.v^2 + \cancel{M}.g.h$$

Simplifico la masa, y despejo: $$v = \sqrt{\frac{g.h_i - g.h}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{0{,}784 - 19{,}6.h}$$

b) su desplazamiento angular α se relaciona con la altura con la expresión que vimos en el CBC:

$$h = \overbrace{l}^{1m}.(1 - \cos\alpha)$$

El despeje al revés nos dice el ángulo en función de la altura: $\alpha = \arccos(1 - h)$

c) La fuerza tangencial es la componente tangencial del Peso, que usando trigonometría se puede descomponer como:

$$P_t = M.g.sen(\alpha) = M.g.\overbrace{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}^{sen = \sqrt{1 - \cos^2}} = M.g.\sqrt{1 - (1 - h)^2}$$

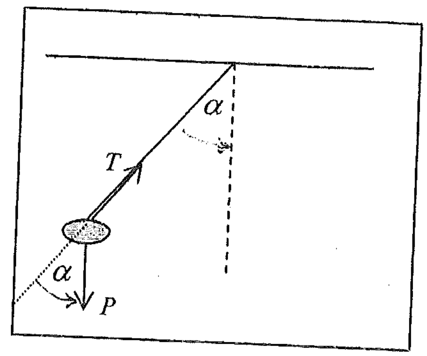
d) la aceleración tangencial sale de plantear la 2^{da} ley en el eje tangencial:

$$\sum_{eje\ t} F = M.a \rightarrow P_t = M.a_t \rightarrow \quad a_t = g.\sqrt{1 - (1 - h)^2}$$

e) su aceleración normal (o centrípeta) se obtiene con la expresión:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{uso\ (a)} a_c = \frac{0{,}784 - 19{,}6.h}{1} = 0{,}784 - 19{,}6.h$$

f) La tensión al pasar por cualquier punto se obtiene despejando de la 2^{da} ley de Newton



$$\sum_{eje\ r} F = M.a_c \rightarrow T - P.\cos(\alpha) = M.\frac{v^2}{R}$$

En el caso particular del punto de equilibrio (el más bajo) se tiene α=0, y esta ecuación nos queda

$$T - P.\underbrace{\cos(0)}_{1} = M.\frac{v^2}{R} \rightarrow T = P + M.\frac{v^2}{R}$$

Para encontrar su valor debo buscar qué velocidad tiene en el punto más bajo, aprovechando la expresión de la parte (a)

$$v = \sqrt{0{,}784 - 19{,}6.h} \xrightarrow{h=0} v = 0{,}885\,\tfrac{m}{s}$$

Reemplazo: $$T_{+bajo} = P + M.\frac{v^2}{R} \cong 6{,}35\,\text{N} \;\checkmark$$

En el punto de máxima elongación, tenemos $h = 0{,}04\ m$ (dato del enunciado). Despejamos el ángulo:

$$h = l.(1 - \cos\alpha) \rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{0{,}04}{1} = 0{,}96$$

Además, por ser el extremo la velocidad es 0. Reemplazo estos datos:

$$T = P.\overbrace{\cos(\alpha)}^{0{,}96} + \underbrace{M.\frac{v^2}{R}}_{0} = 5{,}64\text{N} \quad \checkmark$$

Y en el punto en $\alpha = \frac{\alpha_{máx}}{2}$: necesito calcular el ángulo extremo, porque tengo la altura:

$$h = l.(1 - \cos\alpha) \rightarrow \cos\alpha_{máx} = 1 - \frac{h}{l} = 0{,}96 \rightarrow \alpha_{máx} = 16{,}26 \rightarrow \alpha = \frac{\alpha_{máx}}{2} = 8{,}13^{\circ}$$

Para este ángulo calculo la altura:

$$h = l.(1 - \cos(8{,}13^{\circ})) \cong 0{,}01m$$

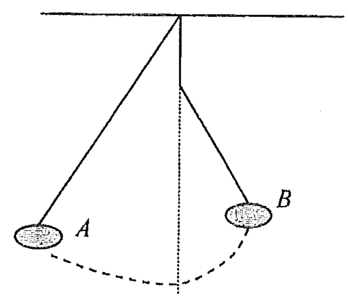
Reemplazo en la ecuación de la velocidad: $$v = \sqrt{0{,}784 - 19{,}6.h} \xrightarrow{h=0{,}01m} v = 0{,}767\,\tfrac{m}{s}$$

Y ahora en la de la tensión: $$T_{intermedio} = P.\cos(8{,}13) + M.\frac{v^2}{R} \cong 6{,}17\,\text{N} \;\checkmark$$

Observación: la tensión va disminuyendo a medida que nos acercamos al extremo, y aumenta cuando nos acercamos al punto central de equilibrio.

g) La respuesta es muy sencilla, pero hay que tener las cosas claras: cuando la masa viene cayendo, el cuerpo está sometido a la fuerza del hilo, y el peso. Como dijimos, la fuerza ***no*** conservativa (la tensión) no hace trabajo por ser perpendicular a la trayectoria. Cuando llegamos a la vertical, el hilo se encuentra con un clavo.

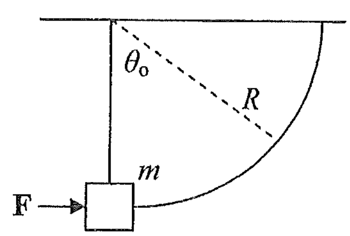
Es evidente que luego de eso, el cuerpo sigue recibiendo las mismas fuerzas, y por lo tanto tampoco cambiará su energía mecánica. Es decir, vale igualar la energía inicial en A (punto de partida) con B el punto más alto que alcanza del otro lado. Como además ambos son puntos extremos, en ambos la velocidad se anula:



$$E_A = E_B \rightarrow \underbrace{\tfrac{1}{2}.M.(v_A)^2}_{0} + M.g.h_A = \underbrace{\tfrac{1}{2}.M.(v_B)^2}_{0} + M.g.h_B$$

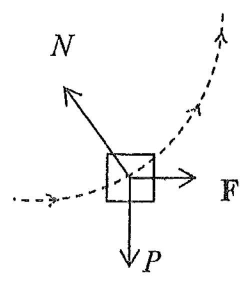
De aquí se despeja que la altura a la que llega del otro lado (punto B) es igual a la altura inicial. Este es el mismo resultado que nos hubiera dado si no hubiéramos puesto el clavo. Es decir, el clavo puesto en el camino afecta en algunas cosas (por ejemplo cambia el radio de giro), pero no cambia la energía del cuerpo, por lo tanto termina a la misma altura máxima.

18. Se tiene una partícula de masa m que desliza sobre una rampa circular sin roce de radio R, inicialmente en equilibrio (en la parte más baja). Mediante la aplicación de una fuerza horizontal de módulo variable se la lleva a una posición tal que el ángulo con la vertical es $\theta_o < 90°$, de modo que la velocidad sea en todo momento muy pequeña.
a) Explicar cómo calcular el trabajo de todas y cada una de las fuerzas que están aplicadas sobre la partícula.
b) Si alguna de las fuerzas es conservativa explicar qué relación hay entre el trabajo de dicha fuerza y la energía potencial.



a) Supongo que aquel que redactó el ejercicio quiso decir "¿qué cuenta debe plantearse para calcular cada trabajo, sin usar los teoremas de energía?". Entonces, veamos primero qué fuerzas están actuando.

Tenemos durante el ascenso la acción del Peso, la Normal, y la fuerza **F**. De las tres, el más sencillo de los trabajos es el de la Normal, porque vale cero ya que esta fuerza es perpendicular al desplazamiento en todo punto de la trayectoria (la línea punteada del dibujo).

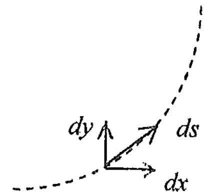


El del Peso es de dificultad intermedia; la fuerza es constante pero el ángulo con la línea punteada de la trayectoria va variando. Por lo tanto se debe plantear el trabajo como una integral sobre la trayectoria:

$$W^{Peso} = \int_{inicio}^{final} \bar{P}\ d\bar{s}$$

Para plantear la integral escribo el producto escalar dentro de la misma.

El vector Peso es P = (0 , -M.g), mientras que el desplazamiento ds es tangente a la trayectoria, por lo tanto se lo puede escribir en sus componentes, como:



$$dx = ds.\cos\theta \quad ; \quad dy = ds.sen\theta$$

Es claro que como se debe efectuar el producto escalar con el vector "Peso", sólo necesitamos la componente sobre el eje y (la dx termina multiplicada por cero)

$$W^{Peso} = \int_{inicio}^{final} \bar{P}\ d\bar{s} = \int_{inicio}^{final} -M.g.sen\theta.ds$$

Por último, para plantear la integral nos falta encontrar la relación entre el diferencial ds (que es la variable de integración cuando se calcula un trabajo) y el ángulo θ. Es decir, para cada punto s de la trayectoria corresponde un ángulo θ, y nosotros debemos escribir la relación para poder resolver la integral (es imposible que integremos si dentro de la integral no ponemos todas las variables en función de una sola). Para eso se plantea la definición del ángulo en radianes (de análisis, el ángulo es el arco dividido el radio):

$$\theta = \frac{s}{R} \xrightarrow{despejo} s = R.\theta \xrightarrow{derivando} ds = R.d\theta$$

En la integral del trabajo del Peso:

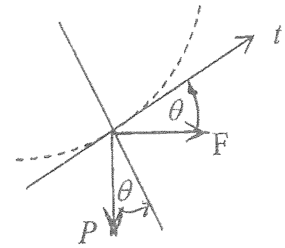
$$W^{Peso} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} -M.g.sen\theta.R.d\theta = M.g.R.\int_{0}^{\theta_o} -sen\theta.d\theta = \left(M.g.R.\cos(\theta)\right)_{0}^{\theta_o}$$

$$\xrightarrow{Barrow} W^{Peso} = M.g.R.\left(\cos(\theta_o) - 1\right)$$

Por último, nos queda calcular el trabajo de la fuerza **F**. Esta fuerza es variable, y se la puede despejar planteando la ecuación de Newton en la dirección tangencial a la trayectoria (donde la aceleración tangencial es nula, porque la velocidad es casi constante). Mirando el diagrama de cuerpo libre, vemos que:

$$F.\cos(\theta) - P.sen(\theta) = 0$$

$$\xrightarrow{despejo} \quad F = M.g.tg(\theta)$$



Observar que la componente del Peso en el eje tangencial se obtiene con el seno de θ (por ser el cateto opuesto) mientras que la de **F** se obtiene con el coseno de θ (ya que se trata del cateto adyacente, ¿OK?). Como decía el enunciado, para que la masa m suba sin cambiar de velocidad la fuerza **F** debía ser variable, pero ahora que conocemos su expresión podemos integrarla para sacar el trabajo:

$$W^{F} = \int_{inicio}^{final} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{inicio}^{final} (M.g.tg(\theta)\,,\,0)\,.\,(ds.\cos(\theta)\,;\,ds.sen(\theta))$$

$$= \int_{inicio}^{final} M.g.tg(\theta)\,.\cos(\theta)\;ds \xrightarrow{ds=R.d\theta} \int_{0}^{\theta_o} M.g.sen(\theta)\,R.\,d\theta =$$

$$= M.g.R.\left(-\cos(\theta)\right)\Big|_{0}^{\theta_o} = M.g.R.\left(-\cos(\theta_o)+1\right)$$

Observación: estos valores de los trabajos son mucho más fáciles si usamos los teoremas de energía. En primer lugar, el trabajo de la fuerza peso, por ser ésta una fuerza conservativa, es igual a la variación de la energía potencial cambiada de signo:

$$W^{Peso} = -\Delta E_{pot} = \overbrace{Mg.H_i}^{0} - Mg.H_f \xrightarrow{H_f=R.(1-\cos(\theta))} W^{Peso} = M.g.R.\left(\cos(\theta_o)-1\right)$$

Mientras que el trabajo total es cero, porque no hay variación de energía cinética. Por lo tanto, el trabajo de **F** se despeja como:

$$W^{Peso} + W^{F} = \overbrace{\Delta E_{cin}}^{=0} \xrightarrow{despejo} W^{F} = -W^{Peso} = M.g.R.\left(1-\cos(\theta_o)\right)$$

Resultados que coinciden con los de las integrales que se calcularon por definición. A esto apunta lo que pide el punto (b). Como conclusión del ejercicio nos queda que vale la pena usar los teoremas porque en ocasiones ahorran muchas cuentas.

19 a) Explique qué representa 1 HP y busque su equivalencia en el sistema MKS.
b) ¿Por qué se dice que cuando se compra un auto se paga su "potencia" pero en el uso cotidiano del mismo lo que se paga es su "energía"?
c) Sofía de 20 años y su abuelo de 70 años suben al primer piso de un edificio por la misma escalera. Como con respecto al piso ambos llegan a la misma altura, los dos realizan el mismo cambio de energía potencial. ¿Ambos realizan el mismo trabajo? ¿Desarrollan la misma potencia? Justifique.
d) ¿Se puede almacenar potencia?

a) el HP es una unidad de potencia, equivalente a 745,7 Watts, y representa la condición necesaria para levantar una libra de peso, una altura de 550 pies en un tiempo de 1 segundo.

b) esto que dice el enunciado es así para todos los motores: una cortadora de césped, un secador de pelo y un auto son más caros cuánto mayor es la potencia. Y en todos los casos ese es el parámetro destacado del producto. Pero al usarlo todos los días, lo que pagamos es la energía que consume (sea como combustible, o electricidad). Si uno no lo usa, no paga nada ¿Por qué pagamos más por la potencia? La idea es que cualquier equipo que haga más o menos lo mismo, es capaz de realizar el mismo trabajo. Pero al tener mayor potencia es capaz de hacerlo en **menos tiempo**. Y eso es lo que pagamos. Puedo cortar el césped de un jardín con una cortadora de ¾ Hp o de 1,5 Hp, la diferencia está en que con la última lo hago más rápido. Con un secador de pelo o un auto es la misma historia.

c) suponiendo que ambos tienen una masa similar, es cierto que ambos realizan el mismo cambio de energía potencial. Y como ese cambio de energía es igual al trabajo que cada uno realizó, concluimos que **ambos trabajos son iguales**. La diferencia en todo caso está en la velocidad con que suben la escalera. Uno presume que la nieta sube en menor tiempo que el abuelo. Si eso es así, el cociente (energía)/(tiempo) da una mayor potencia.

d) lo que se almacena siempre es energía, en forma química (como en pilas o baterías), eléctrica (en el campo de un capacitor), calor o cualquier otra que se te ocurra.

20. Realice una estimación del orden de magnitud de la potencia media que aporta el motor de un automóvil para acelerar el auto desde el reposo a rapidez de autopista. Indique claramente los valores que toma como datos.

Por definición, la potencia media es la variación de energía (o energía recibida) dividido el tiempo. Para el vehículo la variación de energía es el aumento de la cinética (desprecio el rozamiento con el aire). Así, para un auto de 1000 kg de masa, que alcance unos $30\ {}^{m}\!/_{seg}$ (un poco más de $100\ {}^{km}\!/_{h}$), en 20 segundos, tengo:

$$P_M = \frac{\frac{1}{2}.M.v^2}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}.1000\ kg.(30\ {}^{m}\!/_{seg})^2}{20\ seg} = 22500\, watts = 22{,}5\ kw$$

21- Una lámpara de bajo consumo de 15 W, produce la misma luminosidad que una lámpara de filamento convencional que consume 75 W. El tiempo de vida de la lámpara de bajo consumo es de 6.000 hs y su precio de $ 70, mientras que la lámpara convencional tiene un tiempo de vida de 900 hs y cuesta $ 15. Determine el ahorro total que se obtiene al usar una lámpara de bajo consumo durante su tiempo de vida, con respecto al uso de una lámpara convencional durante el mismo intervalo de tiempo. Suponga un costo de energía de $ 0.15 por kw-h.

Hago la cuenta para un tiempo común de 6000 hs, que es el que dura una lámpara de bajo consumo, para que la comparación tenga sentido. Dividiendo por 900 hs (tiempo que dura la común) se obtendrá la cantidad de lámparas de ese tipo necesarias. La cuenta da 6,67. Como es una estimación de ahorro no me hago problema de que no sea un número entero, lo uso así como está.

El costo de comprar esa cantidad de lámparas comunes es: 15$. 6,67 =100 $

Por otro lado debo comparar el costo en la energía consumida por ambos tipos. La de bajo consumo es de 15 W, o sea de 0,015 KW. En un tiempo de uso de 6000 hs su consumo será de:

$$Energía = Potencia\ .\ tiempo = 0{,}015\ kW.\ 6000\ hs = 90\ kW-h$$

Mientras que la común consume:

$$Energía = Potencia\ .\ tiempo = 0{,}075\ kW.\ 6000\ hs = 450\ kW-h$$

Multiplicando cada energía consumida por el precio del kW- h, y sumando el gasto en la compra de lámparas, tendremos el costo de iluminar durante las 6000 hs en cada opción:

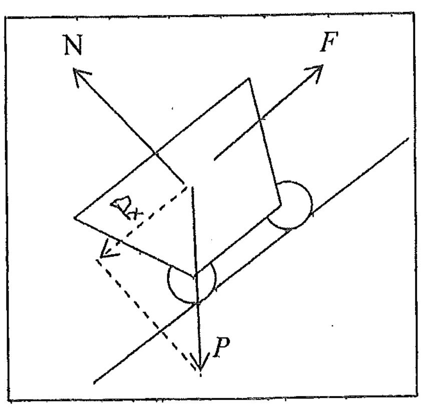
Bajo consumo: $Costo = 70\$ + 90\ kW\,h . 0{,}15 \frac{\$}{kW\,h} = 83{,}5\$$

Lámpara común: $Costo = 100\$ + 450\ kW\,h . 0{,}15 \frac{\$}{kW\,h} = 167{,}5\$$

La diferencia es un ahorro de 84 $ en las de bajo consumo.

22. Un furgón minero cargado tiene una masa de 950 kg y rueda sobre rieles con fricción despreciable. Parte del reposo, y un cable conectado a un malacate tira de él a través de la mina. Los rieles tienen una inclinación de 30° con respecto a la horizontal. El furgón acelera, de manera uniforme, hasta alcanzar una rapidez de 2.2 m/s en 12 s y después continúa con rapidez constante. a) ¿Qué potencia debe proporcionar el motor del malacate cuando el furgón se mueve con rapidez constante? b) ¿Qué potencia máxima debe proporcionar el motor del malacate? c) ¿Qué energía total transfirió el motor en forma de trabajo mecánico, cuando el furgón recorrió 1250 m sobre los rieles?

La potencia instantánea la podemos sacar mediante la expresión: $P_{(t)} = \vec{F}.\vec{v}$



El producto escalar lo reemplazo por el producto de los módulos por el coseno de 0°, porque los vectores *F*uerza y *V*elocidad están alineados (la fuerza que ejerce el malacate a través del cable va en el sentido en que se mueve el furgón). Cuando el furgón se mueve a velocidad constante, la fuerza del cable equilibra la componente "*x*" del peso, porque no hay aceleración. En efecto, de la 2da ley de Newton:

$$x)\quad F - P_x = \overbrace{m.a}^{=0} \rightarrow F = P_x$$

La potencia instantánea vale: $P_{(t)} = \overbrace{M.g.sen(30°)}^{P_x}.2{,}2\, {}^{m}\!/_{seg}.\cos(0) = 10241\ w = 10{,}2\ kw$

b) ¿en qué momento es máxima la potencia? De la expresión que vimos, se deduce que cuando cada factor tome el mayor valor posible. Entonces, analicemos para cada uno de ellos:

① la fuerza es mayor cuando el cable tira del furgón provocando que éste acelere. En efecto, en ese caso no sólo está compensando la componente "x" del Peso, la tiene que superar para que haya aceleración hacia arriba:

$$x)\ \ F - P_x = M.a \xrightarrow{a=\frac{\Delta v}{\Delta t}} F = \overbrace{M.g.sen(30)}^{P_x} + M.\overbrace{0{,}18\hat{3}\ {}^{m}\!/_{seg^2}}^{a} \approx 4829\ \mathrm{N}$$

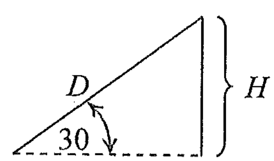
② la velocidad va en aumento durante los primeros 12 seg, luego se mantiene constante en el valor $2{,}2\ {}^{m}\!/_{seg}$, que es el valor máximo.

Entonces, en el momento en que termina el primer tramo (a los 12 seg), cuando el furgón está terminando de acelerar y alcanza la mayor velocidad, es el momento en que el producto $F.v$ es máximo:

$$P_{máx} = F.v.\cos(0) \xrightarrow{máximo} = 4829\ \mathrm{N}.\ 2{,}2\ {}^{m}\!/_{seg} \approx 10600\, watts = 10{,}6\ kw$$

c) calculemos esa energía como la suma de la potencial y la cinética. Para la potencial, el desplazamiento sobre la vía es la hipotenusa del triángulo, mientras que la altura pedida es el cateto opuesto. Así:

$$E = M.g.H + \frac{1}{2}.M.v^2 \xrightarrow{sen(30)=\frac{op\ (=H)}{Desp\ (=D)}}$$



$$950\ kg.9{,}8\ {}^{m}\!/_{s^2}.(D.sen30) + \frac{1}{2}.\ 950\ kg\ .\ (2{,}2\ {}^{m}\!/_{s})^2 \approx 5{,}82\ .10^6\ j$$

23. Una partícula se mueve a lo largo de una línea donde la energía potencial de su sistema depende de su posición r como indica la figura. En el límite, cuando r aumenta indefinidamente, la energía potencial $U(r)$ tiende a 1 J.
a) Identifique cada posición de equilibrio para esta partícula. Indique si cada una es un punto de equilibrio estable, inestable o neutro. b) ¿La partícula estaría acotada en su movimiento, si la energía total del sistema está en ese intervalo?
Ahora suponga que el sistema tiene energía de -3 J. Determine: c) el intervalo de posiciones donde se puede encontrar la partícula, d) su E_c máxima, e) la ubicación donde tiene E_c máxima, f) la energía de enlace del sistema, esto es, la energía adicional que tendría que darse a la partícula para moverla a r tendiente a infinito.

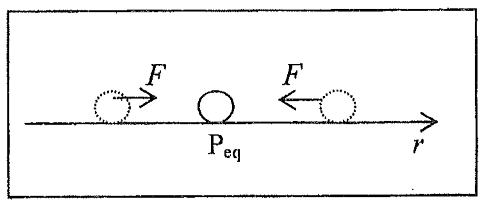
La relación entre el potencial U y la fuerza conservativa asociada a ese potencial es $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, donde del lado derecho tenemos el vector gradiente. Para un potencial central U que sólo depende de "r", el gradiente tiene una única componente en la dirección radial, de valor igual a la derivada respecto de r:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r}.\breve{r} \quad (♣)$$

a) **El análisis de un gráfico de potencial**

Vimos en el CBC que los puntos de equilibrio son aquellos donde la fuerza aplicada es nula (equilibrio es $a = 0$, no confundir con "reposo"). Según la relación (♣), debe anularse la derivada del potencial U. ¿Cómo veo en el gráfico dónde se anula la derivada del potencial U? De análisis 1: la derivada se anula cuando la función alcanza sus puntos máximos y mínimos. Así que, del gráfico, estimo tres puntos de ese tipo: en r = 1,5 *mm*, en 2,5 *mm* y en 3 *mm*. ¿qué significa que sea estable o inestable? Es estable cuando al apartarlo ligeramente de la posición de equilibrio siempre tiende a volver a ella (como le pasa a una bolita en el fondo de un pozo). Es inestable, en cambio, cuando al apartarla ligeramente en algún sentido tiende a alejarse de la posición de equilibrio (una bolita en la punta de una montaña). Finalmente, se llama equilibrio indiferente a la situación en que al hacer un pequeño apartamiento no tiende ni a alejarse ni a acercarse (la bolita, arriba de una mesa plana). En los puntos P de equilibrio estable se tiene que tener la siguiente situación:

(♗) al aumentar r, la fuerza que aparece debe tener signo negativo (para tender a que disminuya r)
(♗ ♗) al disminuir r, la fuerza que aparece debe tener signo positivo (para tender a que aumente r)

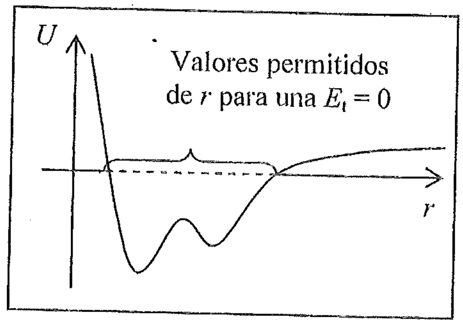


Deben cumplirse las dos cosas a la vez. Eso asegura que no importa para donde lo desplace (izquierda o derecha del punto de equilibrio), tiende a volver al punto de equilibrio P_{eq}. Si una de las dos no se cumple, es un punto de equilibrio inestable.

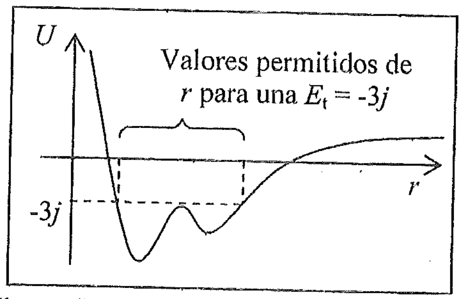
Rebobinando, del lado izquierdo del punto de equilibrio la fuerza debe ser positiva, del lado derecho la fuerza debe ser negativa. Y como la fuerza es la derivada de U pero cambiada de signo, entonces del lado izquierdo la $\frac{dU}{dr}$ debe ser negativa, y del lado derecho la $\frac{dU}{dr}$ debe ser positiva. ¿Cómo miro el signo de la derivada si tengo el gráfico de U? Analizando el crecimiento. Así, vemos que los puntos r_1 = 1,5 *mm* y r_3 = 3 *mm* son de equilibrio estable: del lado derecho de ambos la derivada es positiva (U crece), mientras que del izquierdo la derivada es negativa (U decrece). Por el contrario, r_2 = 2,5 mm es un punto de equilibrio inestable. Como regla visual, en este gráfico tenemos un punto de equilibrio estable en los mínimos de potencial.

b) La energía total de la partícula es la suma de la cinética más la potencial. Si la partícula tiene una energía total menor a 1 j entonces su movimiento se encuentra acotado: no puede irse a infinito porque en ese caso su energía potencial debería valer 1 j, y su energía cinética tomaría un valor negativo. Tampoco puede llegar al origen.

En el gráfico te muestro el rango de valores de r permitidos para que la partícula se mueva, para el caso en que la energía total es cero. Son todos los puntos en que la curva de la energía potencial U se encuentre por debajo de la Energía total, de manera que la potencial sea menor que la total, y la cinética sea positiva.



c) en el caso en que la energía total fuera -3 j, razonando como en (b), tengo permitido las posiciones de r = 0,75 mm hasta r = 3,5 mm (los números son aproximados, son estimaciones del gráfico de la guía). En ese rango la energía potencial es menor a -3 j, nos deja algo para que haya una energía cinética positiva.



d) y e) Como entre las dos energías deben sumar una constante (la total), su energía cinética es máxima cuando su potencial es mínima (siempre hablando dentro de la zona donde puede estar la partícula). Eso ocurre en el primer punto de equilibrio r_1 = 1,5 mm

En ese punto tenemos:

$$E_{cin} + U = E_t \;\rightarrow\; E_{cin} + (-6\,j) = -3\,j \;\rightarrow\; E_{cin} = +3\,j$$

f) Si quiero que se aleje hasta infinito debo darle una energía total mayor a 1 j, de manera que $r \rightarrow \infty$ quede dentro de la zona permitida para la partícula. Entonces, como mínimo necesito una energía adicional de 4 j para que con los -3 j pueda llegar a infinito. Es decir, 4 j es la energía de enlace para esa situación.